# COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Sujet commun ENS - Ulm et Cachan

## Rappels, notations et conventions

Si A et B sont deux ensembles, on note A \ B l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.

On dit qu'un ensemble E est dénombrable s'il existe une application injective de E dans $\mathbf{N}$. On admettra que $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable, mais que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, l'ensemble $\mathbf{Q}^n$ est dénombrable.

Dans tout le problème, on fixe un espace vectoriel réel V de dimension finie $d \geq 1$. On considère, en fait, V surtout comme un espace affine.

Soit W un sous-espace affine de V. Il existe un unique sous-espace vectoriel $\vec{W}$ de V tel que $W = x + \vec{W}$, pour tout point $x$ de W; c'est l'espace vectoriel direction de W; la dimension de W est, par définition, celle de $\vec{W}$. Un repère affine de W est un couple formé d'un point de W et d'une base de $\vec{W}$. Deux sous-espaces affines W et W' sont dits supplémentaires si V est somme directe des sous-espaces vectoriels $\vec{W}$ et $\vec{W}'$ directions de W et W'; en ce cas, l'intersection de W et W' est réduite à un point et la projection $r$ de V sur W' parallèlement à W est caractérisée par la condition que pour tout point $x$ de V, $r(x)$ appartient à W' et est de la forme $x + w$ avec $w \in \vec{W}$.

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille finie, non vide, de points de V et $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels de somme égale à 1, on remarquera que le barycentre $x$ des points $(x_i)$ $(i \in I)$ affectés des coefficients $\lambda_i$ peut se calculer dans l'espace vectoriel V par la formule $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$.

Le sous-espace affine engendré par une partie non vide S de V est l'intersection des sous-espaces affines de V contenant S; c'est aussi l'ensemble des barycentres de familles finies non vides de points de S.

Soit $n$ un entier $\geq 1$; si $x_1, \ldots, x_n$ sont des points de V, on dit que $x_1, \ldots, x_n$ sont affinement indépendants si le sous-espace affine engendré par la partie $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de V est de dimension $n - 1$.

**Avertissement** : Il s'agit ici d'un problème de géométrie. Un dessin ne constitue pas, en soi, une démonstration, mais peut très bien servir de support à l'argumentation.

La Partie I ne sert qu'en V.

## I. Préliminaires

Soit $\varphi$ une application injective de V dans V, transformant trois points alignés en trois points alignés. L'image d'une droite affine $D$ de V par $\varphi$ est ainsi incluse dans une unique droite affine notée $\overline{\varphi}(D)$. On suppose que si $D$ et $D'$ sont deux droites affines parallèles, alors il en est de même de $\overline{\varphi}(D)$ et $\overline{\varphi}(D')$. Enfin, on suppose que $\varphi(V)$ n'est pas inclus dans une droite affine de V.

Dans les questions 1) à 4), on suppose $\varphi(0) = 0$.

1) Prouver qu'on a $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ pour tout $x$ et $y$ dans V (on pourra d'abord traiter le cas où $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ sont indépendants).

2) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, il existe un unique nombre réel $f(\lambda)$ tel que $\varphi(\lambda x) = f(\lambda)\varphi(x)$ pour tout $x \in V$.

3) Prouver que l'application $f : \lambda \mapsto f(\lambda)$ est croissante, puis que $f$ est en fait l'identité de $\mathbf{R}$.

4) Prouver que $\varphi$ est une application linéaire bijective de V dans V.

On ne suppose plus dans la question 5) que l'on a $\varphi(0) = 0$.

5) Montrer que $\varphi$ est une application affine bijective de V dans V.

## II. Préliminaires

1) Soient S une partie non vide de V, W le sous-espace affine de V engendré par S, et $m$ la dimension de W. Montrer que S contient $m+1$ points affinement indépendants. Montrer qu'en fait, pour tout entier $n$ tel que $1 \leq n \leq m$ et tout $n$-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ de points de S affinement indépendants, il existe un point $x_{n+1}$ de S tel que les points $x_1, \ldots, x_{n+1}$ de V soient affinement indépendants.

2) Soient $n$ un entier $\geq 1$ et $x_1, \ldots, x_n$ des points de V. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $x_1, \ldots, x_n$ ne sont pas affinement indépendants;

(ii) il existe des nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 0$ et $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$ dans l'espace vectoriel V.

Si S est une partie de V, on appelle enveloppe convexe de S l'intersection des parties convexes de V contenant S; c'est une partie convexe de V. Si S est non vide, c'est aussi (et on l'admettra) l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des familles finies non vides de points de S.

3) Soit S une partie non vide de V. Montrer que l'enveloppe convexe de S est l'ensemble des barycentres $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{d+1} x_{d+1}$ où $x_1, \ldots, x_{d+1}$ sont des points de S et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{d+1}$ des nombres réels positifs de somme 1.

4) Soit S une partie compacte de V. Montrer que l'enveloppe convexe de S est une partie compacte de V.

5) Soient $m$ un entier $\geq 0$, $x_1, \ldots, x_{m+1}$ des points affinement indépendants de V, W le sous-espace affine engendré par ces points et $\mathcal{E} = (y, (y_1, \ldots, y_m))$ un repère affine de W. Soit $\Delta$ l'ensemble des barycentres des points $x_1, \ldots, x_{m+1}$ affectés de coefficients strictement positifs. Soit $x \in \Delta$ et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ ses coordonnées dans le repère $\mathcal{E}$. Prouver qu'il existe un nombre réel $\epsilon > 0$ tel que les points de W de coordonnées $\beta_1, \ldots, \beta_m$ vérifiant $|\beta_i - \alpha_i| \leq \epsilon$ pour $i = 1, \ldots, m$ soient dans $\Delta$.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties convexes compactes de V (y compris l'ensemble vide). Pour $C$ et $D$ dans $\mathcal{C}$, on pose $C \wedge D = C \cap D$ et on note $C \vee D$ l'enveloppe convexe de $C \cup D$; ainsi $C \wedge D$ et $C \vee D$ sont des éléments de $\mathcal{C}$.

Plus généralement, si $(C_i)_{i\in I}$ est une famille finie non vide d'éléments de $\mathcal{C}$, on note $\wedge_{i\in I}C_i$ l'intersection des ensembles $C_i$ et $\vee_{i\in I}C_i$ l'enveloppe convexe de l'union des ensembles $C_i$; ce sont des éléments de $\mathcal{C}$.

Dans les parties III à V, on se propose de déterminer les applications $\Phi$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ telles que:

$$\begin{aligned}\Phi(C\wedge D) &= \Phi(C)\wedge\Phi(D)\\ \text{et } \Phi(C\vee D) &= \Phi(C)\vee\Phi(D)\end{aligned}$$

pour $C$ et $D$ dans $\mathcal{C}$. On fixe une telle application $\Phi$. Pour $x\in V$, on note $\Phi(x)$ l'ensemble $\Phi(\{x\})$.
On pose aussi $C_0=\Phi(\emptyset)$ et enfin, on note A l'ensemble des points $x$ de V tels que $\Phi(x)=C_0$.

**III** 1) Montrer que $\Phi$ préserve l'inclusion et que pour $x$ et $y$ des points distincts de V, on a $\Phi(x)\wedge\Phi(y)=C_0$.

2) Montrer que A est convexe.

3) Si A = V, montrer que $\Phi(C)=C_0$ pour tout $C\in\mathcal{C}$.

4) Si A $\neq$ V, montrer que A est vide [Si $x$ est un point de A et $y$ un point de V\A, on pourra montrer qu'il existe un point $z$ de V\A distinct de $y$ et tel que $y$ appartienne au segment $\{x\}\vee\{z\}$].

Dans les parties IV et V, on suppose que la dimension de V est $\geq 2$.

**IV** Dans cette partie, on veut établir que si A est vide, alors $C_0$ est vide. On raisonne par l'absurde en supposant $C_0\neq\emptyset$ et A$=\emptyset$.

On choisit un point $p$ de V tel que le sous-espace affine $V(p)$ engendré par $\Phi(p)$ soit de dimension minimale. On choisit aussi un repère affine de $V(p)$.
On note $B$ l'ensemble des points $x$ de V tels que $\Phi(x)$ soit inclus dans $V(p)$. En particulier $p$ appartient à $B$.

1) Montrer que $V(p)$ est de dimension $\geq 1$.

2) Soit $x\in B$. Montrer que $\Phi(x)\setminus C_0$ contient un point à coordonnées rationnelles dans le repère affine choisi de $V(p)$.

3) Montrer que $B$ est dénombrable, puis que $B=\{p\}$.
On choisit un sous-espace affine W de V supplémentaire de $V(p)$. On note $q$ le point d'intersection de W et $V(p)$, et $r$ la projection sur W parallèlement à $V(p)$. Pour $C\in\mathcal{C}$, on pose $\Phi'(C)=r(\Phi(C))$. Pour $x\in$ V, on note $\Phi'(x)=r(\Phi(x))$.

4) Prouver que $\Phi'(C)$ appartient à $\mathcal{C}$ et contient $q$ pour tout $C\in\mathcal{C}$. Montrer que pour $C$ et $D$ dans $\mathcal{C}$, on a

$$\begin{aligned}\Phi'(C\wedge D) &\subset \Phi'(C)\wedge\Phi'(D)\\ \text{et } \Phi'(C\vee D) &= \Phi'(C)\vee\Phi'(D)\end{aligned}$$

On choisit un hyperplan affine $H$ de V ne passant pas par $p$. On note $\mathcal{C}(H)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$ qui sont inclus dans $H$.

5) Soient $C$ et $D$ dans $\mathcal{C}(H)$ tels que $C \wedge D = \emptyset$. On veut établir par l'absurde que $\Phi'(C) \wedge \Phi'(D) = \{q\}$. On suppose qu'on a un point $q'$ dans $\Phi'(C) \wedge \Phi'(D)$, distinct de $q$.

a) Montrer que $(\{p\} \vee C) \wedge (\{p\} \vee D) = \{p\}$.

b) Prouver qu'il existe une droite affine $L$ parallèle à $V(p)$ et disjointe de $V(p)$, qui coupe $\Phi(C)$ et $\Phi(D)$. Si $x \in L \cap \Phi(C)$ et $y \in L \cap \Phi(D)$, montrer que

$$(\Phi(p) \vee \{x\}) \wedge (\Phi(p) \vee \{y\}) \neq \Phi(p).$$

c) Conclure.

6) Soient $v_1, \ldots, v_{d-1}$ des points affinement indépendants de $H$. Le but de cette question est de prouver que le sous-espace affine engendré par $\cup_{i\in\{1,\ldots,d-1\}}\Phi'(v_i)$ est de dimension $d-1$. On note $s$ l'équibarycentre de $v_1, \ldots, v_{d-1}$; c'est un élément de $H$.

a) Montrer que $\Phi'(s) \subset \vee_{i\in\{1,\ldots,d-1\}}\Phi'(v_i)$ mais que pour tout entier $\alpha$ tel que $1 \leq \alpha \leq d-1$, on a

$$\Phi'(s) \wedge \left(\vee_{\substack{i\in\{1,\ldots,d-1\}\\ i\neq\alpha}} \Phi'(v_i)\right) = \{q\}$$

b) Prouver que $\Phi'(s)$ contient un point $t$ distinct de $q$.

c) Prouver qu'il existe des points $w_1, \ldots, w_{d-1}$ tels que $w_i \in \Phi'(v_i)$ pour $i = 1, \ldots, d-1$ et $t \in \vee_{i\in\{1,\ldots,d-1\}}\{w_i\}$. Montrer que $w_1, \ldots, w_{d-1}$ sont affinement indépendants.

d) Supposons que $q$ appartienne à $\vee_{i\in\{1,\ldots,d-1\}}\{w_i\}$. Montrer que $t$ est alors barycentre à coefficients positifs de $q$ et de $d-2$ des points $w_i$ et en tirer une contradiction.

e) Supposons que $q$ appartienne au sous-espace affine engendré par $w_1, \ldots, w_{d-1}$. Montrer que $\{q\} \vee \{t\}$ contient un point, distinct de $q$, qui est barycentre à coefficients positifs de $d-2$ des points $w_1, \ldots, w_{d-1}$.

f) Conclure.

7) Montrer qu'il existe une famille non dénombrable $(v(i))_{i\in I}$ de $(d-1)$-uplets $v(i) = (v(i)_1, \ldots, v(i)_{d-1})$ de points affinement indépendants de $H$ tels que pour $i$ et $j$ dans $I$, $i \neq j$, les ensembles $\{v(i)_1\} \vee \ldots \vee \{v(i)_{d-1}\}$ et $\{v(j)_1\} \vee \ldots \vee \{v(j)_{d-1}\}$ soient disjoints; en tirer une contradiction.

**V** On montre de manière analogue, et nous admettrons, que si $\Lambda = C_0 = \emptyset$, alors $\Phi(x)$ est réduit à un point pour tout $x \in V$. On note $\varphi(x)$ ce point.

1) Montrer que $\varphi$ est injective et envoie trois points alignés sur trois points alignés. Si $D$ est une droite affine de V, on note $\bar{\varphi}(D)$ l'unique droite affine de V contenant $\varphi(D)$.

2) Montrer que $\varphi(V)$ n'est pas inclus dans une droite affine de V.

3) Montrer que $\varphi$ préserve le parallélisme des droites affines : si $D$ et $D'$ sont parallèles, il en est de même de $\bar{\varphi}(D)$ et $\bar{\varphi}(D')$.

4) Prouver que $\varphi$ est une application affine bijective de V dans V et que $\Phi(C)$ est l'image de $C$ par $\varphi$ pour tout $C \in \mathcal{C}$.